

PROGRAMME DE COLLE - SEMAINE N° 8: du 18/11/2024 au 22/11/2024

Connaissances minimales attendues

Chapitre 5 - Séries numériques réelles

Se reporter à un programme de colle précédent

Chapitre 6 - Probabilités discrètes : révisions et compléments

- Ensemble fini, cardinal d'un ensemble fini ;
- Ensemble dénombrable, ensemble au plus dénombrable ;
- Les trois grands principes du dénombrement : principe de bijection, principe multiplicatif, principe additif ;
- Permutation d'un ensemble. Définition. Si E est un ensemble fini de cardinal n , une permutation de E peut être assimilée à une n -liste d'éléments distincts de E , et réciproquement ;
- Nombre de permutations d'un ensemble fini ;
- p -combinaison d'un ensemble E ;
- Coefficient binomial $\binom{n}{p}$: définition, expression avec le symbole factorielle, propriétés de symétrie, relation de Pascal, formules dites « d'inversion » ;
- **(HP)** Relation de Pascal généralisée ;
- Formule du binôme de Newton ;
- **(HP)** Formule de Vandermonde ;
- Expérience aléatoire, univers Ω des résultats possibles ;
- **(HP)** Tribu sur un ensemble-univers Ω , événement ;
- Espace probabilisable ;
- Événement impossible, événement certain, événement élémentaire ;
- Intersection (généralisée) d'événements, réunion (généralisée) d'événements ;
- Complémentaire d'un événement ;
- Propriétés de distributivité généralisée de $\cap$ sur $\cup$ et de $\cup$ sur $\cap$;
- Lois de De Morgan généralisées ;
- Événements incompatibles, événements deux à deux incompatibles ;
- Systèmes complets d'événements ;
- Probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, propriété de σ -additivité ;

- Probabilité du complémentaire d'un événement ;
- Formule du crible dans le cas d'une réunion de 2 ou 3 événements ;
- Événement quasi-certain, événement quasi-impossible ;
- Équiprobabilité, probabilité uniforme sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$;
- Indépendance de 2 événements, indépendance 2 à 2 d'une famille d'événements, indépendance mutuelle d'une famille d'événements ;
- Indépendance et passage au complémentaire ;
- Probabilité d'un événement B sachant un événement A, notation $\mathbb{P}_A(B)$;
- $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ (si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $A \in \mathcal{T}$ vérifiant $\mathbb{P}(A) \neq 0$) ;
- Formule des probabilités composées ;
- Formule des probabilités totales sans et avec conditionnement ;
- Formule de Bayes ;
- **(HP)** Théorèmes de limite monotone dans le contexte des probabilités et ses corollaires fondamentaux.
- **(HP)** Conditions suffisantes de quasi-certitude, conditions suffisantes de quasi-impossibilité. Pratique sur des exemples.
- Variables aléatoires réelles, variables aléatoires réelles discrètes, variables aléatoires réelles discrètes finies, variables aléatoires réelles discrètes non finies ;
- Ensemble-image d'une variable aléatoire ;
- Notations $[X \leq x]$, $[X < x]$, $[X = x]$, $[X \in I]$;
- Si X est une variable aléatoire discrète $\{ [X = x], x \in X(\Omega) \}$ forme un système complet d'événements ;
- Loi d'une variable aléatoire réelle discrète ;
- Suite réelle définissant une loi de probabilité discrète finie/ non finie ;
- Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors :
 - * $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$;
 - * $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$.
- Loi conditionnelle d'une variable aléatoire discrète sachant un événement A
- Variables aléatoires discrètes indépendantes ;
- Indépendance mutuelle d'une suite (indexée par un ensemble au plus dénombrables) de variables aléatoires réelles discrètes ;
- Transformée $g(X)$ d'une variable aléatoire réelle discrète X ;
- Expression de la loi de $g(X)$ en fonction de la loi de X ;

- Transformée $g(X, Y)$ d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes (X, Y) , transformée $g(X_1, \dots, X_n)$ d'un n -uplet de variables aléatoires réelles discrètes $(X_1, \dots, X_n)$;
- Le lemme des coalitions : version « basique », version « évoluée », version « évoluée ++ » ;
- Espérance d'une variable aléatoire discrète finie, espérance d'une variable aléatoire discrète non finie ;
- **(HP)** Si X est une variable aléatoire discrète finie de support $\llbracket 0, n \rrbracket$, alors $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$;
- Le théorème de transfert pour calculer $E(g(X))$, dans le contexte des variables aléatoires discrètes finies, puis dans le contexte des variables aléatoires discrètes non finies ;
- Propriété de linéarité de l'espérance ;
- Condition suffisante de positivité de l'espérance ;
- Propriété de croissance de l'espérance ;
- **(HP)** Condition suffisante de l'existence de l'espérance « par domination » ;
- Moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ d'une variable aléatoire discrète ;
- **(HP)** Pour tout $r \in \mathbb{R}$, si X admet un moment d'ordre $r + 1$, alors X admet un moment d'ordre r ;
- **(HP)** Une variable aléatoire discrète bornée admet des moments de tout ordre ;
- Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète ;
- Formule de Koenig-Huygens ;
- Variance d'une transformée affine d'une variable aléatoire discrète X admettant une variance ;
- Variable aléatoire centrée, centrer une variable aléatoire discrète ;
- Variable aléatoire réduite, centrée réduite, centrer et réduire une variable aléatoire discrète ;
- Variable aléatoire certaine : définition, espérance, variance, exemple ;
- Variable aléatoire suivant une loi quasi-certaine : définition, espérance, variance, exemple ;
- Une variable aléatoire discrète de variance nulle est quasi-certaine ;
- Loi uniforme discrète sur une partie de $\mathbb{R}$, loi uniforme discrète sur $\llbracket a, b \rrbracket$, sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ (cas particuliers) ; définition, notation $\mathcal{U}(X(\Omega))$, espérance, variance, exemple ;
- Lien affine entre les lois $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ et $\mathcal{U}(\llbracket 1, b - a + 1 \rrbracket)$;
- Loi de Bernoulli : définition, notation $\mathcal{B}(p)$, espérance, variance, exemples ;
- **(HP)** Indicatrice d'un événement A , notation $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_A$ suit la loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$;
- Si X suit une loi de Bernoulli, alors $0 \leq V(X) \leq \frac{1}{4}$;
- Loi binomiale : définition, notation $\mathcal{B}(n, p)$, espérance, variance, exemples ;
- Schéma binomial : toute variable aléatoire égale au nombre de Succès suite à la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité du Succès à chaque épreuve vaut p suit la loi binomiale de paramètres n et p ;

- Loi géométrique : définition, notation, espérance, variance, exemples ;
- Schéma géométrique : toute variable aléatoire égale au rang du premier Succès suite à la répétition d'un nombre illimité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité du Succès à chaque épreuve vaut p suit la loi géométrique de paramètre p ;
- **(HP)** Fonction de répartition et d'antirépartition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique ;
- **(HP)** Caractère sans mémoire d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique ;
- Loi de Poisson : définition, notation $\mathcal{P}(\lambda)$, espérance, variance, exemples ;
- Approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- « Les incontournables » du programme de colle précédent sont toujours au programme

« Et plus si affinités ... »

- Manipuler les définitions formelles des chapitres 5 et 6 afin de montrer des résultats théoriques généraux ;
- Utiliser (de manière plus ou moins guidée) « une formule de type Taylor-Lagrange avec reste intégrale » pour montrer la convergence d'une série ;
- Utiliser « une comparaison série-intégrale » pour étudier la nature d'une série ;
- Utiliser la formule de Vandermonde ;
- Étudier des lois de couples de variables aléatoires discrètes ;
- Utiliser le lemme des coalitions pour montrer des résultats généraux de stabilité de loi pour la somme (en anticipant le Chapitre 10).

Preuves exigibles

Propositions

1. Expression des coefficients binomiaux à l'aide de la factorielle **[A]**.
2. Relation de Pascal **[A]**, **(HP)** relation de Pascal généralisée **[A]**.
3. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ en fonction du cardinal de E (où E est un ensemble fini) **[A]**.
4. **(HP)** Formule de Vandermonde **[A]**.
5. Formule du crible (dans le contexte des probabilités) dans le cas de la réunion de trois événements à partir de la formule du crible dans le cas de la réunion de deux événements **[A]**.
6. « Formule de l'équiprobabilité » : si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ **[A]**.
7. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et si A est un événement de probabilité non nulle, alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ **[A]**.
8. Formule des probabilités totales sans et avec conditionnement **[A]**.
9. Formule des probabilités composées **[A]**.
10. **(HP)** Conditions suffisantes de quasi-certitude et quasi-impossibilité **[A]**.
11. **(HP)** Théorèmes de limite monotone dans le contexte des probabilités et corollaires **[A]**.
12. Si X est une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors :
 - * $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$ **[C+A]** ;
 - * $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)$ **[A]** ;
13. **(HP)** Si X est une v.a discrète finie vérifiant $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$ **[C]**.
14. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ **[A]** ;
15. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ **[A]** ;
16. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ **[A]** ;
17. Espérance et variance de X où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ **[A]** ;
18. Si X compte le nombre de *Pile* après avoir lancé successivement n fois une pièce de monnaie amenant *Pile* à chaque lancer avec la probabilité p , alors X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) (**Proposition 82**) **[A]** ;
19. Si X est égal au rang du premier *Pile* suite à une succession illimitée de lancers indépendants d'une pièce amenant *Pile* à chaque lancer avec la probabilité p , alors X suit la loi géométrique de paramètre p (**Proposition 84**) **[A]** ;
20. **(HP)** Fonction de répartition et d'antirépartition d'une v.a. suivant une loi géométrique **[A]**.

Exemples/ exercices

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ converge et majorer sa somme [TD].
2. Déterminer, pour tout $q \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(q + \frac{1}{n}\right)^n$ [TD].
3. Inégalités de Boole [TD].
4. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots MATHS et MATHEMATIQUES [Ac].
5. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer simultanément 5 cartes dans un paquet comportant 52 cartes dont 26 sont de couleur rouge et 26 sont de couleur noire. Déterminer le nombre de tirages amenant 5 cartes de la même couleur [Ac].
6. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une infinité de fois la même pièce de monnaie. Écrire l'événement « Obtenir une infinité de *Pile* » à l'aide des événements auxiliaires P_i : « Obtenir *Pile* au i ème lancer » ($i \in \mathbb{N}^*$) [C].
7. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard simultanément 4 boules dans une urne opaque contenant 6 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 6.
 - 1) Construire un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire [C].
 - 2) Calculer la probabilité d'obtenir les boules 1, 2 et 3 au niveau du tirage [Ac].
 - 3) Calculer la probabilité d'obtenir les boules 1 et 3 au niveau du tirage [Ac].
 - 4) Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules portant un numéro pair et 2 boules portant un numéro impair [Ac].
8. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer n fois une même pièce de monnaie standard. Déterminer la probabilité que tous les lancers amènent le même résultat [C].
9. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer successivement sans remise (jusqu'à épuisement des boules) 1 boule dans une urne comportant initialement N ($N \geq 2$) boules dont 1 seule est noire et $N - 1$ sont blanches.
 Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la probabilité de tirer la boule noire au k ème tirage vaut $\frac{1}{N}$ [C].
10. Soit $(a, b) \in]0, 1]^2$.
 On dispose de deux pièces A et B amenant respectivement *Pile* à chaque lance avec la probabilité a et avec la probabilité b .
 On choisit au hasard une des deux pièces et on la lance.
 Si on obtient *Pile*, on garde la même pièce que l'on relance une nouvelle fois, sinon, on prend l'autre pièce que l'on lance.
 On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ adéquat.
 - 1) Déterminer la probabilité d'obtenir *Pile* lors du premier lancer [C].
 - 2) Déterminer la probabilité d'obtenir *Pile* lors des deux lancers [Ac].
 - 3) Déterminer la probabilité d'obtenir *Pile* lors du deuxième lancer [Ac].
11. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment une pièce de monnaie standard. Donner un exemple de système complet d'événements comportant 2 événements, donner un exemple de système complet d'événements comportant 3 événements, donner un exemple de système complet d'événements comportant une infinité d'événements [C] ;

12. Si on lance indéfiniment une même pièce de monnaie amenant *Pile* à chaque lancer avec la même probabilité $p \in]0, 1[$, alors la probabilité de n'obtenir que des *Pile* est nulle [C] (deux méthodes vues en cours : l'une s'appuyant sur l'un des corollaires des théorèmes de limite monotone (HP), l'autre non).
13. Soit $n \geq 2$. Soit $b \geq 2$.
On effectue deux tirages successifs sans remise dans une urne comportant n boules noires et b boules blanches.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
Déterminer la loi de X [C].
14. On lance 10 fois successivement le même dé octaédrique supposé parfaitement équilibré.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a obtenu le chiffre 1 suite à ces 10 lancers.
Déterminer la loi de X [C].
15. Soit $n \geq 2$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement au hasard avec remise 2 boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 et à n .
On appelle M la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.
Déterminer la loi de M [C].
16. Toute variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ne possède pas d'espérance [C].

17. Calcul de $E(X^2)$ si X suit une loi binomiale [C].
18. Existence et calcul de la variance de $3X + 1$ où X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1 [C].

[A] : Annexe **Preuves** ;

[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;

[Ac] : Annexe **Corrections**

[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels) et TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri (**HP**) (tri-bulles et tri-par-insertion)].
- **TP3 - Calculs numériques** [algorithme de dichotomie, méthode de point fixe, méthode de Newton-Raphson (**HP**), méthode des rectangles permettant le calcul approché d'une intégrale sur un segment(**HP**), application au calcul des valeurs approchées des valeurs prises par la fonction de répartition de toute variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (**HP**)].
- **TP4 - Graphes (rappels)** [révision du vocabulaire et des théorèmes du programme, représentation d'un graphe avec Python (matrice numpy d'adjacence, liste des listes d'adjacence, dictionnaire), fonctions de conversion d'une représentation à une autre, divers exercices de manipulation de graphes (ordre, nombre d'arêtes, caractère adjacent de deux sommets, voisinage, degré, caractère isolé d'un sommet, caractère simple, complet, eulérien d'un graphe, calcul de nombre de chaînes reliant deux sommets donnés, calcul des distances combinatoires à un sommet dans un graphe simple, calcul de l'excentricité, du diamètre d'un graphe, algorithme de Dijkstra (calcul d'une chaîne de poids minimal)].

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme (**HP**)).

On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- On évitera autant que possible de consacrer plus d'une demi-heure aux questions de cours ;
- Le premier exercice sera de difficulté modérée, non théorique et sera essentiellement calculatoire ;
- Les probabilités sont incontournables cette semaine : il s'agira de mettre l'accent sur les variables aléatoires réelles discrètes ;
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.